

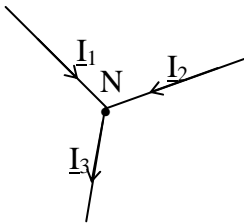
Méthodes d'étude des circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé

Cadre d'étude :

Nous supposons que toutes les f.e.m ou c.e.m sont sinusoïdaux de même fréquence f . Alors, tous les courants et tensions du circuit sont sinusoïdaux, de même fréquence f car on travaille sur des circuits linéaires en régime permanent sinusoïdal.

I. Lois de Kirchhoff en représentation complexe

1) Loi des nœuds



∀ la branche k , $i_k = i_k(t) = I_k \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \phi_k)$ avec $i_k(t)$ représenté par $\underline{i}_k(t) = I_k \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j(\omega t + \phi_k)} = \underline{I}_k \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}$ $\underline{I}_k = I_k \cdot e^{j\phi_k}$

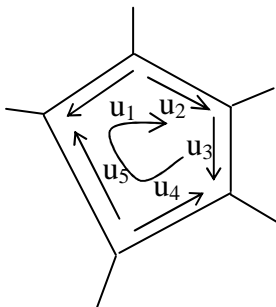
Loi des nœuds en N :

* en valeurs instantanées (ou réelles) : $\sum_k \varepsilon_k i_k = 0$ avec $\varepsilon_k = +1$ si i_k est orienté vers N, - 1 dans le cas contraire.

* en représentation complexe associée : $\sum_k \varepsilon_k \underline{i}_k = 0$

ou en valeur efficace complexe (ou amplitude complexe) : $\sum_k \varepsilon_k \underline{I}_k = 0$

2) Loi des mailles



$u_k = u_k(t) = U_k \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \phi_k)$ avec u_k représenté par $\underline{u}_k(t) = U_k \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j(\omega t + \phi_k)}$
 $= \underline{U}_k \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t}$ $\underline{U}_k = U_k \cdot e^{j\phi_k}$

Ayant choisi un sens de parcours de la maille,

* en valeurs instantanées : $\sum_k \varepsilon_k u_k = 0$ avec $\varepsilon_k = +1$ si u_k est orienté dans le sens choisi, - 1 dans le cas contraire.

* en représentation complexe associée : $\sum_k \varepsilon_k \underline{u}_k = 0$

ou en valeur efficace complexe (ou amplitude complexe) : $\sum_k \varepsilon_k \underline{U}_k = 0$

En conclusion, les lois de Kirchhoff sont satisfaites par les valeurs efficaces (ou les amplitudes) complexes associées aux grandeurs réelles en régime sinusoïdal forcé.

3) Résolution

L'utilisation des lois des nœuds et des mailles conduit à un système d'équations linéaires dont la résolution permet d'accéder aux valeurs efficaces (ou aux amplitudes) complexes. Revenir alors aux grandeurs réelles :

$$x_k = \text{Re}(\underline{X}_k \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j\omega t})$$

Remarques : -1- Les équations vérifiées par les grandeurs complexes sont identiques à celles obtenues en régime permanent continu en remplaçant les résistances par les impédances.

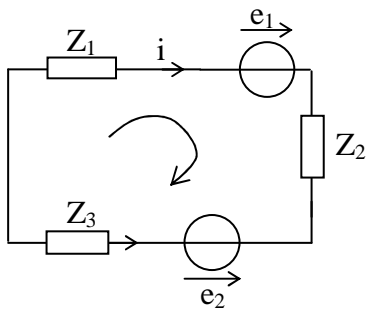
-2- Comme on peut passer de l'équation différentielle vérifiée entre grandeurs réelles à l'équation entre grandeurs complexes associées en régime harmonique, la transformation inverse est possible. On retrouve l'équation différentielle par la correspondance

$$(j\omega)^n \underline{X} \rightarrow \frac{d^n x}{dt^n}$$

II. Théorèmes généraux en régime harmonique

Conséquence de la linéarité des équations de Kirchhoff vérifiées entre grandeurs complexes associées aux grandeurs instantanées.

1) Loi de Pouillet

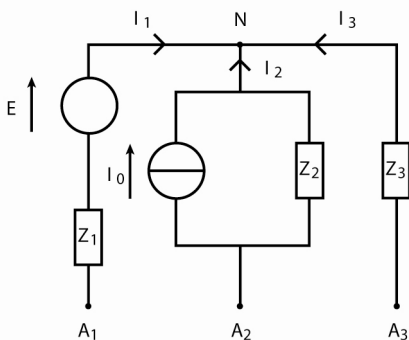


$$\underline{I} = \frac{\sum_k \varepsilon_k \underline{E}_k}{\sum_k \underline{Z}_k}$$

avec $\varepsilon_k = +1$ pour e_k dans le sens de i , -1 dans le cas contraire.

Exemple : $e_1 = E_1 \sqrt{2} \cos(\omega t)$ $e_2 = E_2 \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ avec $\underline{E}_1 = E_1$ et $\underline{E}_2 = E_2 e^{i\varphi_2}$

2) Théorème de Millman



$$\underline{V}_N = \frac{\sum_k Y_k [\underline{V}_k + \varepsilon_k \underline{E}_k] + \sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{0k}}{\sum_k Y_k} \quad \text{avec } \varepsilon_k = +1 \text{ si } E_k \text{ ou } I_{0k} \text{ sont orientés vers } N, \text{ sinon } \varepsilon_k = -1$$

Exemple :

Dans un circuit, on ne mesure pas un potentiel mais la différence entre deux potentiels (tension). On choisit comme référence le potentiel d'un point M du circuit noté V_M (souvent $V_M = 0V$ - masse du circuit -). La relation précédente s'écrit :

$$\underline{V}_N - \underline{V}_M = \frac{\sum_k Y_k [(\underline{V}_k - \underline{V}_M) + \varepsilon_k \underline{E}_k] + \sum_k \varepsilon_k \underline{I}_{0k}}{\sum_k Y_k}$$

3) Théorème de superposition (ou théorème d'Helmholtz)

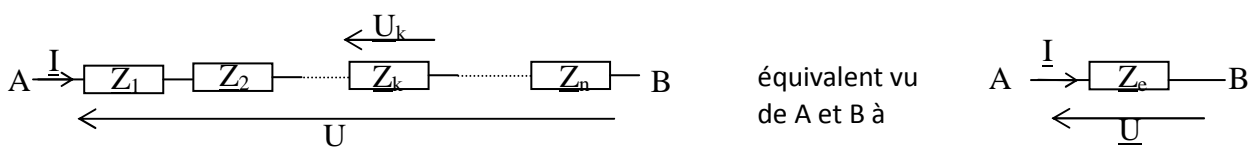
Dans un circuit contenant des sources sinusoïdales indépendantes, toute grandeur $y(t)$ (intensité ou tension), réponse à cette distribution de sources, est la somme des grandeurs $y_k(t)$ réponse du circuit lorsque toutes les sources indépendantes sont éteintes à l'exception de la source k .

Rappel : Eteindre * une source de tension = la remplacer par un court-circuit
* une source de courant = la remplacer par un circuit ouvert

Les impédances internes des sources doivent être conservées.

4) Association de dipôles passifs - impédance équivalente

a) association série

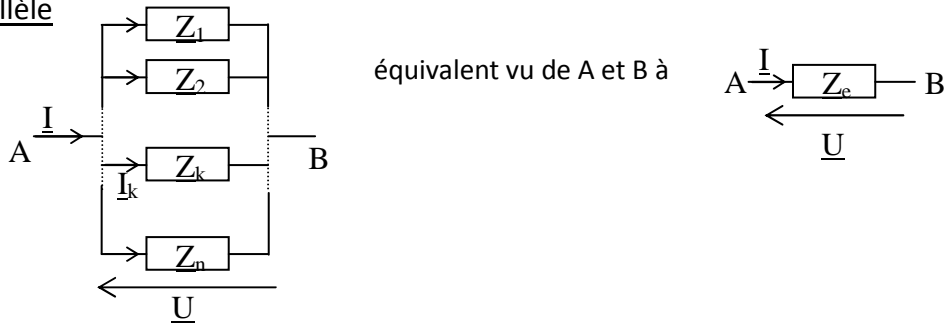


$$\underline{U} = \sum_k \underline{U}_k = (\sum_k \underline{Z}_k) \cdot \underline{I} = \underline{Z}_e \cdot \underline{I} \quad \text{d'où} \quad \underline{Z}_e = \sum_k \underline{Z}_k$$

Application : **diviseur de tension**

$$\frac{\underline{U}_k}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_e}$$

b) association parallèle



$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \text{ (ou } \underline{Y}_e) \text{ et } \underline{I} = \sum_k \underline{I}_k = \sum_k \underline{Y}_k \underline{U} = \underline{Y}_e \underline{U} \text{ d'où } \underline{Y}_e = \sum_k \underline{Y}_k$$

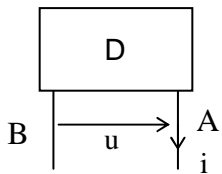
Application : **diviseur de courant** $\frac{\underline{I}_k}{\underline{I}} = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_e} = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_k}$

c) Association quelconque :

- * Combiner les règles d'association série et parallèle dans les cas simples.
- * Cas plus complexes : exprimer, en travaillant sur le dipôle réel vu de A et B, \underline{U} en fonction de \underline{I} . En déduire

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \text{ (ou } \underline{Y}_e).$$

5) Théorèmes de Thévenin et Norton



Soit un dipôle actif D **linéaire**, contenant des sources (de tension ou de courant) indépendantes. Ces sources doivent toutes avoir **la même fréquence f**.
 Dans ces conditions la relation qui relie les représentations complexes de la tension $u(t)$ aux bornes du dipôle et de l'intensité $i(t)$ qui le traverse est une relation affine.

Cette relation peut s'écrire sous la forme :

$$\underline{u} = \underline{e}_t - \underline{Z}_T \underline{i} \text{ soit en valeur efficace complexe (ou amplitude complexe) } \underline{U} = \underline{E}_T - \underline{Z}_T \underline{I} .$$

$$\underline{i} = \underline{i}_n - \underline{Y}_N \underline{u} \text{ soit en valeur efficace complexe (ou amplitude complexe) } \underline{I} = \underline{I}_N - \underline{Y}_N \underline{U}$$

EQUIVALENCE ENTRE LES DEUX MODELISATIONS : $\underline{E}_T = \underline{Z}_T \underline{I}_N \text{ et } \underline{Z}_T = 1/\underline{Y}_N$

Vu de l'**extérieur** D est équivalent à :

Modélisation de Thévenin

* \underline{E}_T , f.e.m. complexe efficace = valeur efficace complexe de la tension aux bornes de D en **circuit ouvert** (courant de **sortie nul**) : $\underline{E}_T = (\underline{V}_A - \underline{V}_B)_{\underline{I}=0} = \underline{U}_{c.o}$

* \underline{Z}_T , impédance complexe vue de A et B, obtenue en **éteignant toutes les sources indépendantes** :

$$\underline{Z}_T = - \left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right)_{\underline{E}_t=0}$$

Modélisation de Norton

* \underline{I}_N , c.e.m. complexe efficace = valeur efficace du courant de **court circuit** du dipôle : $\underline{I}_N = (\underline{I}_{A \rightarrow B})_{\underline{U}=0} = \underline{I}_{cc}$

* \underline{Y}_N , admittance complexe vue de A et B, obtenue en **éteignant toutes les sources indépendantes** :

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_T = - \left(\frac{\underline{U}}{\underline{I}} \right)_{\underline{I}_N=0}$$

Conseils :

1- Pour éviter de longs calculs :

* Utiliser :

- les ponts diviseurs de tension ou de courant.
- les équivalences de Thévenin - Norton. Le but est de se ramener à une maille unique.
- le théorème de Millman (en particulier dans les montages à A.O.).

* Pour un nombre complexe conserver en général la forme factorisée :

par exemple $\underline{X} = \frac{\underline{N}}{\underline{D}} \quad : \quad |\underline{X}| = \frac{|\underline{N}|}{|\underline{D}|} \quad \text{Arg}(\underline{X}) = \text{Arg}(\underline{N}) - \text{Arg}(\underline{D})$

* Si des simplifications sont proposées, les utiliser dès le début des calculs.

* Vérifier régulièrement l'homogénéité des relations, avec en particulier : $[R] = [L\omega] = \left[\frac{1}{C\omega} \right]$

2- Les calculs effectués en représentation complexe sont un outil commode. Revenir en fin de calcul aux grandeurs réelles instantanées.